II.E Caractérisation de Γ par log-convexité

La fonction Gamma d'Euler est :

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Théorème 23: de Bohr-Mollerup-Artin

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

i) $f(1) = 1$;

ii) pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) = xf(x)$;

iii) $\ln \circ f$ est convexe (on dit que f est log-convexe).

Alors $\mathcal{F} = \{\Gamma\}$.

Démonstration.

Existence : la fonction Gamma est un élément de $\mathcal{F}$

i) $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = 1$.

ii) Par IPP justifiée par la convergence du crochet qui vaut 0, on a pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = \left[-t^x \mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

iii) La fonction Γ est $\mathcal{C}^2$ donc l'application $\ln \circ \Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$, et $(\ln \circ \Gamma)'' = \frac{\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux fonctions $t \mapsto \ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $t \mapsto t^{\frac{x-1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et on a :

$$\begin{aligned} \Gamma'(x) &= \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{\frac{x-1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \times t^{\frac{x-1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Gamma''(x)^{\frac{1}{2}} \Gamma(x)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Il s'en suit $\Gamma''\Gamma - (\Gamma')^2 \geqslant 0$ et donc l'application $\ln \circ \Gamma \geqslant 0$, donc elle est convexe.

Unicité : Γ est le seul élément de $\mathcal{F}$
On sait maintenant que $\Gamma \in \mathcal{F}$. On va montrer que tout élément de $\mathcal{F}$ coïncide avec Γ sur $\mathbb{N}^*$, puis sur $]0,1[$ et enfin sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \mathbb{N}$.
Soient $f \in \mathcal{F}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1^{er} **cas : x est un entier (strictement positif).** Comme f et Γ vérifient $i)$ et $ii)$, on a :

$$f(x) = (x-1)! = \Gamma(x)$$

Ainsi f coïncide-t-elle avec Γ sur $\mathbb{N}^*$.

2^d **cas :** $x \in]0,1[$. Notons $g := \ln \circ f$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors g est convexe par hypothèses, donc par le lemme des 3 pentes, on a l'inégalité suivante :

$$\underbrace{\frac{g(n)-g(n-1)}{1}}_{\text{pente 1}} \leqslant \underbrace{\frac{g(n+x)-g(n)}{x}}_{\text{pente 2}} \leqslant \underbrace{\frac{g(n+1)-g(n)}{1}}_{\text{pente3}}$$

On fera un beau dessin du courbe convexe pour illustrer le lemme.

Ainsi on obtient $\ln(n-1) \leqslant \frac{g(n+x)-g(n)}{x} \leqslant \ln(n)$, puis :

$$0 \leqslant g(n+x) - g(n) - x\ln(n-1) \leqslant x\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

Or, f vérifie ii) donc par une récurrence immédiate :

$$\begin{aligned} g(n+x) &= \ln(f(n+x)) \\ &= \ln((x+n-1)f(x+n-1)) \\ &= \dots \\ &= \ln\left(f(x)\prod_{j=1}^{n}(x+n-j)\right) = g(x) + \ln\left(\prod_{j=0}^{n-1}(x+j)\right) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} g(n+x) - g(n) - x\ln(n-1) &= \ln(f(x)) + \ln\left(\prod_{j=0}^{n-1}(x+j)\right) - g(n) - x\ln(n-1) \\ &= g(x) + \ln\left(\prod_{j=0}^{n-1}(x+j)\right) - \ln((n-1)!) - \ln\left((n-1)^x\right) \\ &= g(x) - \ln\left(\frac{(n-1)!(n-1)^x}{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(x+j)}\right). \end{aligned}$$

Enfin, par le lemme d'encadrement ($n \to \infty$)

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{n!n^x}{\prod_{j=0}^{n}(x+j)}\right);$$

puis par continuité de l'exponentielle :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{\prod_{j=0}^{n}(x+j)}$$

Or cette équation est vérifiée par toute fonction de $\mathcal{F}$, donc en particulier par $\Gamma \in \mathcal{F}$ et donc par unicité de la limite, f et Γ coïncident sur $]0,1[$.

3^e **cas :** $x \in]1,+\infty[\setminus\mathbb{N}$. Écrivons x comme la somme de sa partie entière $\lfloor x \rfloor$ et de sa partie fractionnaire $\mathrm{d}(x)$, c'est-à-dire $x = \lfloor x \rfloor + \mathrm{d}(x)$ où, remarquons le, $\mathrm{d}(x)$ est élément de $]0,1[$. Par les deux cas précédents, on a alors :

$$f(x) = (x-j) \quad f(\mathrm{d}(x)) = \left(\prod_{j=1}^{\lfloor x \rfloor - 1}(x-j)\right)\Gamma(\mathrm{d}(x)) = \Gamma(x).$$

Au total, l'étude des trois cas donnent que les applications f et Γ coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui achève de montrer l'égalité $\mathcal{F} = \{\Gamma\}$.

■